

运输计划

MicDZ

长沙市长郡中学

1 题目大意

给出一棵 n 个点的树，指定 m 条路径，允许你将 $n - 1$ 条边中的一条边的边权变为 0 使 m 条路径中的最长路径最小 ($n, m \leq 300000$)。

2 题解

2.1 解法一

最大值最小很容易就想到二分答案。考虑二分的上下界，上界即为最长路径的路径长，下界为最长路径的路径长减去最长边的边长【1】。

check 的思路可以贪心解决。假设 check 到一个 mid，此时所有路径长大于 mid 的路径都是不合法的路径，所以需要将它们全部减小至 mid 以下。我们只需要找到这些不合法路径所公共覆盖的最长的一条边，将其删去，就相当于将所有不合法的路径减小了一个这个边长。此时再检查最长的路径【2】是否小于 mid 即可。

考虑如何找到所有不合法条路径覆盖的公共边。将每一条路径上的每一条边加一。假设不合法路径共有 k 条，如果一条边被这 k 条边全部覆盖，必须要满足这条边被加了 k 次。用树上差分 $O(1)$ 维护即可。

该算法时间复杂度为 $O(n \log n)$ ，但常数巨大，最后一个 $n \leq 300000$ 的点很难卡过。注意文中提到的【1】、【2】两处优化，这两处优化可以帮助你时限时卡过此题。nzz 提供一种拓扑逆序树上差分累加方法，常数有所优化，可以在没有【1】、【2】两处优化的情况下 AC。

2.2 解法二

考虑此题最暴力的解法，枚举 $n - 1$ 条边，将枚举到的边设为 0 后统计 m 条路径的长度。

上面算法最显著的问题在于枚举了 $n - 1$ 条边，显然，如果删除最长路径外的一条边，答案仍然为最长路径，那么我们只需要考虑最长路径上的边。但是如果原树是一条链，这样的优化就没有意义了。

考虑统计答案时的优化，我们每次删边时，不需要统计所有的边，就像算法 (2.2) 中的【2】优化一样。假设当前删掉的边为 e ，我们只需要知道经过 e 路径中最长的一条与不经过 e 路径中最长的一条，这样就可以统计答案了。

考虑如何快速地求出这两个值。经过 e 的最长路径显然就是所有路径中的最长路径，因为 e 就是从这条路径中删去的。考虑不经过 e 路径中最长的怎么求。在树剖后，一条路径可能会变成几条链，我们就记录下这些链的编号区间，找到 $[1, n]$ 对于这些区间并的补集更新答案。

时间复杂度 $O(n \log^2 n)$ ，常数要看是谁写的。

3 代码

3.1 解法一

见下发 `std1.cpp`

3.2 解法二

<https://www.luogu.org/blog/yu123123/solution-p2680>

3.3 解法三

见下发 `std3.cpp`